Le 3 juin 2020

Chers élèves,

Comme promis la semaine passée voici les exercices sur le chapitre des lois de probabilités, particulièrement sur la notion de variable aléatoire et sur la loi binomiale, et j'ai joint dans un 2° document les solutions rédigées des exercices 1) à 4) en vous laissant le soin de réaliser vous –mêmes les exercices 5) à 10). Les solutions de ces exercices se trouvent également dans ce dernier document. Vous n'hésitez pas à m'envoyer vos exercices pour que je les corrige.

Nous terminerons la semaine prochaine par des exercices sur la loi normale et ainsi nous aurons bouclé le programme.

D'ores et déjà je vous félicite pour le travail immense que vous avez fourni tout au long de ces deux années. C'était difficile mais vous l'avez toujours fait sans rechigner et toujours de bonne humeur. Vous avez tous énormément progressé (souvenez-vous de vous en fin de 4°) et vous avez ainsi acquis une très bonne méthode de travail, une autonomie et le sens du travail en groupe qui vous serviront quelles que soient les études que vous envisagerez.

Vous allez me manquer car il y a longtemps que je n'ai pas eu un si bon groupe, travailleur et sympathique.

L'année n'est pas encore terminée et nous allons tout faire pour nous revoir en chair et en os.

Bonne continuation.

M.Bottin

Solutions des exercices Lois de probabilités

1) a) L'événement F : "Il choisit au moins un fût fêlé" est le contraire de l'év. $\bar{F}$: "Il choisit 2 fûts non fêlés".

$\# E = C_{20}^2$ et $\# \bar{F} = C_{15}^2$

donc $p(F) = 1 - p(\bar{F}) = 1 - \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = 1 - \frac{105}{190} = \frac{17}{38}$

b) Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de 2 fûts associe la somme des doses absorbées

1°) X prend les valeurs 0, 20, 40, 60, 80

X = 0 correspond à choisir 2 fûts non fêlés donc $p(X=0) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{21}{38}$

X = 20 " " " 1 fût à 20 Rem et 1 non fêlé (0 Rem)

donc $P(X=20) = \frac{C_3^1 \cdot C_{15}^1}{190} = \frac{9}{38}$

X = 40 correspond à choisir 2 fûts à 20 Rem ou 1 fût à 0 Rem et 1 fût à 40 Rem donc $p(X=40) = \frac{C_3^2 + 15 \cdot 2}{190} = \frac{33}{190}$

X = 60 correspond à choisir 1 fût à 20 Rem et 1 fût à 40 Rem

donc $p(X=60) = \frac{3 \cdot 2}{190} = \frac{6}{190}$

X = 80 correspond à choisir 2 fûts à 40 Rem donc $p(X=80) = \frac{1}{190}$

donc la loi de probabilité se résume à :

x_i	0	20	40	60	80
p_i	$\frac{105}{190}$	$\frac{45}{190}$	$\frac{33}{190}$	$\frac{6}{190}$	$\frac{1}{190}$

2°) $E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i$ (voir page 13 théorie)

$= 0 + 20 \cdot \frac{45}{190} + 40 \cdot \frac{33}{190} + 60 \cdot \frac{6}{190} + 80 \frac{1}{190}$

$= 14$ La dose moyenne est donc de 14 Rem.

$V(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$ (voir page 13)

$= 0 + 20^2 \cdot \frac{45}{190} + 40^2 \cdot \frac{33}{190} + 60^2 \cdot \frac{6}{190} + 80^2 \cdot \frac{1}{190} - 14^2$

$= 324$

donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 18$. L'écart-type est de 18 Rem.

3°) $p(X \geq 50) = p(X=60) + p(X=80) = \frac{6}{190} + \frac{1}{190} = \frac{7}{190} \simeq 3,7\%$.

Il a une prob. de 3,7 % d'avoir des séquelles.

2) A vous ! Un Olympien a 2 yeux et 1 Cyclope 1 seul !

Solution a)

x_i	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$

b) $E(x) = 6,5$ $\quad V(x) = \frac{15}{28}$ $\quad \sigma(x) \simeq 0,73$.

Loi binomiale : $p(X=k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$ avec $p+q=1$

n est le nombre d'expériences réalisées et

p est la probabilité de succès lors d'une expérience

Dans chacun des exercices faisant intervenir cette formule il faut définir la variable aléatoire et en déduire p et q

3) Soit X la variable aléatoire : "Le nombre de personnes qui sont intéressées par le démarcheur".

Il y a 3 expériences donc $n = 3$ et la prob. qu'une personne soit intéressée (succès) est $p = \frac{1}{5}$ donc $q = \frac{4}{5}$

a) Aucune personne n'est intéressée correspond à la valeur 0 de X donc $p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,512$

b) On cherche $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,512 = 0,488$

c) On cherche $p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1)$

$= 0,512 + C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,896$.

d) On cherche : $p(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = 0,096$.

---

4) Soit X : "Le nombre de crocus obtenus en plantant des bulbes".

a) Il y a 5 expériences (5 bulbes plantés) donc $n=5$ et la prob. qu'un bulbe donne un crocus (succès) est $p = 0,8$ donc $q = 0,2$

1°) $p(X=5) = C_5^5 \; 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,8^5 \simeq 0,328$

2°) $p(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$

$= C_5^3 \; 0,8^3 \cdot 0,2^2 + C_5^4 \; 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5$

$\simeq 0,942$.

b) 1°) Soit F : "Le bulbe produit une fleur jaune" qui s'écrit encore C : "Le bulbe produit un crocus" et J : "Le crocus est jaune"

Les événements sont indépendants donc

$p(F) = p(C \cap J) = p(C) \cdot p(J) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$

2°) Soit X : "Le nombre de crocus jaunes obtenus"

Il y a 4 expériences donc $n = 4$ et la prob. d'obtenir un crocus jaune est $p = 0,48$ (voir 1°) donc $q = 0,52$

$p(X = 0) = (0,52)^4 \simeq 0,073$

$p(X = 2) = C_4^2 (0,48)^2 \cdot (0,52)^2 \simeq 0,374$.

A vous jusqu'à l'ex. 10)

Solution :

5) a) 0,00064 b) 0,174 c) 0,826

6) a) 0,272 b) 0 !

7) a) 0,044 b) 0,205 c) 0,623 d) 0,377

8) a) $3,5 \cdot 10^{-5}$ b) 0 c) 0 d) 0.

9) $\frac{1}{483}$ b) $1,3 \cdot 10^{-5}$

10)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

$E(X) = 3,75$